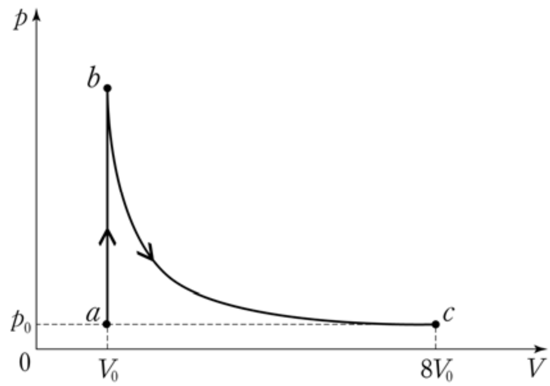
2016년 2교시

13. 그림은 1몰의 단원자 분자 이상 기체가 압력 $p_0$, 부피 $V_0$인상태에서 $a \rightarrow b \rightarrow c$의 경로를 따라 변할 때, 기체의 압력 $p$와 부피 $V$의 관계를 나타낸 그래프이다. $a \rightarrow b$는 정적 과정, $b \rightarrow c$는 단열 과정이다.




$a \rightarrow b$과정에서 기체에 유입된 열에너지 $Q_{ab}$와 $b \rightarrow c$ 과정에서 기체가 한 일 $W_{bc}$를 각각 풀이 과정과 함께 구하시오. (단, 단원자 분자 이상 기체의 비열비 $\gamma = \frac{5}{3}$이다.) [4점]

[풀이]

열역학 제1법칙, $\Delta Q = \Delta U + W$ 과 $U = \frac{3}{2}RT$에서

$Qab = U_b - U_a = \frac{3}{2}(RT_b - RT_a) = \frac{3}{2}(p_b V_0 - p_0 V_0)$ (*)

$b \rightarrow c$는 단열과정이므로

$p_b V_0^\gamma = p_0 (8V_0)^\gamma$

$p_b = p_0 8^\gamma = p_0 8^{5/3} = 32p_0$ 을 (*)애 대입하면

$Q_{ab} = \frac{3}{2}(32p_0 V_0 - p_0 V_0) = \frac{3}{2} \cdot 31 p_0 V_0 = 46.5 p_0 V_0$

$W_{bc} = \int_{V_0}^{8V_0} p dV$

$p_b V_0^\gamma = p V^\gamma \quad p = p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma}$

$$W_{bc} = \int_{V_0}^{8V_0} p_b V_0^\gamma V^{-\gamma} dV = p_b V_0^\gamma \int_{v_0}^{8V_0} V^{-\gamma} dV$$

$$= p_b V_0^\gamma \left| \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_0}^{8V_0} = (32p_0) V_0^{5/3} (-3/2)(8^{-2/3} V_0^{-2/3} - V_0^{-2/3})$$

$$= (-48) p_0 V_0^{5/3} (-3/4) V_0^{-2/3} = 36 p_0 V_0$$

{답}

$Q_{ab} = 46.5 p_0 V_0$

$W_{bc} = 36 p_0 V_0$

2016년 3교시

5. $N$개의 동일한 1차원 단순 조화 진동자로 이루어진 계가 있다. 진동자들은 1차원 격자에 고정되어 서로 독립적이고 서로 상호작용을 하지 않는다. 계를 이루는 진동자 1개의 허용 가능한 에너지는 $\epsilon_n = (2n+1)\epsilon_0$, $n = 0$, $1$, $2$, $\cdots$이다.

계는 절대 온도가 $T$인 열원과 평형 상태에 있다. 계를 이루는 진동자 1개의 분배함수 $Z_1$과 계의 평균 에너지 $U$를 풀이 과정과 함께 구하시오. 또한 고온($k_B T \gg \epsilon_0$ )에서의 근삿값 $U_{고온}$을 쓰시오. (단, $\epsilon_0$은 양의 상수이고, $k_B$는 볼츠만 상수이며, $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$이다. $x \ll 1$일 때 $e_x \approx 1 + x$를 이용하시오.)

[4점]

$$\epsilon_n = (2n+1)\epsilon_0 = (n+1/2)2\epsilon_0$$

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)2\beta\epsilon_0}$$

$$= e^{-\beta\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(2\beta\epsilon_0)}$$

$$= e^{-\beta\epsilon_0} \frac{1}{1-e^{-\beta 2\epsilon_0}}$$

$$\ln Z_1 = -\beta\epsilon_0 - \ln(1-e^{-2\beta\epsilon_0})$$

진동자의 평균에너지는

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = \epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0}-1}$$

평균에너지 $U$는

$$U = N\bar{\epsilon} = N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0}-1}\right)$$

고온극한 $k_B T \gg \epsilon_0$에서의 $U_{고온}$은

$$U_{고온} = N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{e^{2\beta\epsilon_0}-1}\right) \simeq N\left(\epsilon_0 + \frac{2\epsilon_0}{1+2\beta\epsilon_0-1}\right) = N(\epsilon_0 + kT)$$