**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 9 – 2017년 5월 14일

다중적분(multiple integrals)

이제까지 배운 일반적인 적분의 형태는

이며, 는 곡선 상의 구간을 나타낸다.



이므로, 적분값의 물리적인 의미는 적분 구간 곡선 아래의 면적을 의미한다. 이 장에서는 다음과 같은 이중적분(double integrals)인

과(는 xy 평면 상에서의 일부 면적을 의미) 삼중적분(triple integrals)인

를(는 xyz 공간에서의 부피를 의미) 다룰 것이다.

**이중 적분**

이번에는 2변수 함수의 적분을 다룬다. 일변수 함수의 경우 1차원공간에서 적분을 취한 것과 같이 2변수 함수의 경우는 2차원공간에서 적분을 취하게 된다. 먼저 폐직사각형영역에서 정의된 이변수함수 를 생각하고 을 가정하자. 의 그래프는를 갖는 한 곡면이다.



를 위에 그래프를 표현했을 때 나타나는 곡면이라 할 경우, 아래의 부피는 어떻게 구할 수 있는가? 이는 근사적으로 다음과 같이 접근이 가능하다.

먼저 를 개의 구간으로 나누고, 를 개의 구간으로 나눈다. 이는 영역을 작은 조각의 여러 개의 사각형으로 나눈 것과 같다.



각 내에서 을 택하면, 아래 그림에서 볼 수 있는 것처럼 밑면 와 높이 로 하는 긴 직사각형 상자(또는 기둥)에 의해 위에 있는 의 부분을 근사할 수 있다. 이 상자의 부피는 상자의 밑면의 넓이와 높이의 곱이다.



만약 모든 직사각형들에 대해서 이런 방식을 적용하고 대응하는 상자들의 부피를 합한다면 다음과 같은 의 전체 부피에 대한 근사값을 얻을 수 있다.



과 이 더 커짐에 따라 즉, 작은 직사각형들을 더욱 잘게 쪼갬으로써, 위의 근사값은 참값에 더욱 근접하게 됨을 직관적으로 알 수 있으므로 의 부피 는

가 될 것이라고 예상할 수 있다. 만약 극한이 존재한다면 이 극한값을 에서의 의 이중적분이라 부르며

로 나타낸다. 즉, 에서의 의 이중적분은

이다. 따라서 폐직사각형 위에서 의 이중적분에 대한 한가지 해석은 함수 아래(그리고 x-y평면위)에서의 부피를 나타내다. 즉,

이다.

**이중적분을 계산하는 실질적인 방법**

이중적분은 다음과 같이 반복적분으로 나타내어(어느 순서로든지) 적분값을 구할 수 있다.

(예제) 의 구간이 일 때, 의 값을 구하라.



(예제)

(예제)

폐직사각형이 아닌 일반 영역에서의 이중적분은 다음과 같이 계산이 가능하다.





(예제) , 에 의해 둘러싸인 의 값을 구하여라.

(예제) 와 에 의해 둘러 쌓인

