**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 7 – 2018년 4월 18일

기울기 벡터(Gradient Vector)

기울기 벡터를 정의하기 전 먼저 전미분의 개념을 살펴보자. 함수 의 1차편도함수 는 가 고정되어 있는 상태에서 단위 변화에 대한 의 변화율을 나타낸 것이다. 또한 도 가 고정되어 있는 상태에서 단위 변화에 대한 의 변화율을 나타낸 것이다. 이제 두 독립변수 가 동시에 변화할 때 의 총 변화량은 어떻게 될까? 전미분의 개념은 여기에서 출발한다.

**전미분(total derivative)의 개념**

지금까지 배운 도함수는 독립변수가 여러 개 있는 것처럼 보이지만 하나를 제외한 나머지 독립변수를 상수 취급함으로써 실직적으로는 독립변수가 하나인, 의 단위 변화에 따른 종속변수 의 변화율을 나타내는 개념으로 미분으로 이해하였다. 예켠대 두 사람이 조깅을 하는데 A는 10분 동안 10km를 달리고, B는 30초 동안 0.75km를 달린다고 하자. 단위시간을 1분으로 하면 A는 1분 동안 1km()를, B는 1분 동안 1.5km) 속도로 달린 것이다. 개인별로 일정시간 동안 달렸을 때 두 사람이 달린 총 거리 변화는 A가 간 거리와 B가 간 거리의 합으로 나타난다.

이와 같은 내용을 함수 의 그래프를 이용하여 설명해보자. 함수 가 다음 그림과 같다고 하자. 앞의 예와 연결시켜 는 시간, 는 거리로 생각하면 이해하기가 더 쉬울 것이다.



시간이 만큼 변화할 때 위치는 P점에서 Q점으로 이동하였다. 이때 속도는 사선의 기울기, 즉 가 된다. 그러면 거리 변화 는 속도 에 시간의 변화량 를 곱한 것과 같다.

이제 가 0에 가까울 정도로 미세하게 변화한다면 위 식은 다음과 같이 된다.

여기서 *,* 를 의 미분이라 한다. 위의 식을 변형하면

앞의 예를 통해 이 식의 의미를 보면 단위시간당 거리 변화율(속도)은 일정 시간 동안 변화된 총거리를 시간으로 나눈 값과 같다. 즉, 한 묶음으로서의 도함수 는 다시 2개의 미분 의 비율로 나타낼 수 있다. 이처럼 도함수를 이용하여 의 무한소 변화에 대한 의 변화량을 구하는 것을 ‘전미분한다’라고 한다. 이것은 위의 그림을 통해서 설명하면 임의의 한 점 근방에서 가 아주 미세하게 변했을 때 의 변화량이 가 된다는 것을 의미한다.

이제 2변수함수인 경우 전미분을 생각해보자. 앞의 예로 돌아가서 총 거리 변화는 A의 속도(와 A가 달린 시간()의 곱과 B의 속도()와 B가 달린 시간()의 곱을 합해서 구해진다. 여기서 총 거리 변화는 바로 2변수함수에서의 전미분을 의미한다. 그런데 A의 속도 는 B가 간 거리와 관계없이 A의 단위시간당 거리로, B의 속도 도 A가 간 거리와 관계없이 B의 단위시간당 거리로 구해지므로 각 개인의 속도는 편미분의 의미를 갖는다.

위의 식을 일반화시켜 2변수함수 를 전미분하면 다음과 같다.

즉, 의 총 변화량은 변수에 의한 의 총 변화량과 변수에 의한 의 총 변화량의 합으로 표시된다. 이때 변수에 의한 의 총 변화량은 의 단위 변화에 대한 변화율 에 의 변화량을 곱한 값으로 구해진다. 의 총 변화량도 마찬가지로 의 단위변화에 대한 변화율 에 의 변화량을 곱한 값으로 구해진다.

함수가 1변수함수라면 로 되므로 가 성립되어 전미분과 편미분이 일치하게 된다. 그러므로 1변수함수에서는 전미분과 편미분을 구분할 필요가 없다.

**(예제)** 를 전미분하라.

**(예제)** 오차 분석(Error Analysis)

이고, 와 에 대한 각각의 오차는 이다. 에 대한 오차를 구하라.

**(예제)** 온도를 자동으로 측정하여 무선으로 송신하는 장치를 대형 풍선에 매달아 날려보낸다고 하자. 우선, 시간 , 위치()에서 측정된 온도를 라 하자. 그런데시간 동안에 이 풍선이 새로운 위치()로 이동하였다면 이 때의 온도 변화 를 근사적으로 나타내시오.

**(예제)** 질량 인 두 천체로 구성된 계의 환산질량(reduced mass)은 로 정의한다. 이 1% 증가하면 가 일정하려면 가 얼만큼 변해야 하는가?

**기울기 벡터(Gradient Vector)**

공간상에 스칼라 물리량인 의 분포가 있다고 하자. (이를 스칼라 장(scalar field)라 한다, 즉, 스칼라 물리량이 위치에 따라 변하는 경우에 해당한다, 예: 압력, 온도, 중력 포텐셜). 그러면 어느 한 지점에서 스칼라 함수인 의 크기가 가장 많이 변하는 방향이 있을 것이다. 이 말은 그 점에서 모든 방향으로 의 미분을 취해보면, 그 미분 값이 가장 큰 방향이 있다는 뜻이다. 이처럼 한 지점에서 스칼라 함수의 변화가 가장 큰 방향과 그 때의 미분 값을 동시에 표현하려면 벡터로 나타내어야 한다. 이를 수학적으로 **스칼라 함수의 기울기(gradient)**라고 정의한다.

예를 들어, 온도마당에서 열의 흐름은 온도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 일어난다. 따라서, 열의 흐름을 추적하기 위해서는 온도의 높낮이에 대한 정보가 꼭 필요하다. 이러한 정보를 얻기 위해서는 주어진 곳의 온도 와 주어진 곳 이웃 의 온도 를 비교해야 한다. 이 때에 각 미분량 와 을 연결해 주는 벡터량이 기울기 벡터가 된다. 즉, 임의의 점 주변에서 스칼라 값의 변화에 대한 정보를 기울기 벡터가 준다.

이제 좀 더 정확한 기울기 벡터의 정의를 살펴보자. 직각 좌표계로 스칼라 함수 를 나타낸다면 로 표시할 수 있다. 따라서 전미분 정의로부터 스칼라 함수 의 미소 변화량인 는 다음과 같이 표현된다.

를 함수 ‘의 gradient’라 한다. 표기법은 외에 로 표기가 가능하며, ‘del ’라 읽는다. 즉,

로 정의한다. 이 정의를 3차원 좌표로 확장하면 기울기 벡터는 일반적으로

와 같이 정의한다.

**(예제)** 온도장(temperature field)이 원점으로부터 거리 r에 있는 점들의 함수로 주어진다고 하자. 예를 들어, 온도장이

으로 주어졌다고 하자. 기울기 벡터를 구하시오.

**기울기 벡터의 기하학적 설명**

기울기 벡터의 기하학적 의미를 살피기 위하여, 그 크기와 방향을 살펴 보자. 함수 를 고려하자. 아래 그림은 값이 동일한 값을 갖는 점끼리 연결한 등치선(contour lines)을 x, y 평면에 표시하고, 그 위에 임의의 세 점((),(1,1),(0,))에서의 기울기 벡터()를 함께 표현한 것이다.



그림에서 알 수 있듯이, 기울기 벡터는 임의의 점 를 지나는 등치선에 수직임을 알 수 있다. 아래 그림은 또 다른 예로 의 등치선, 등치선과 기울기 벡터를 함께 표현한 것을 각각 나타낸 것이다.

 

기울기 벡터는 가장 가파르게 증가하는 방향 (steepest ascending direction)으로 기울기의 크기를 갖는 벡터임을 알 수 있다. 기울기 벡터를 다음과 같이 해석할 수 있다. 아래 그림과 같이 임의의 점에서 동일한 미소 간격으로 이동할 시 어떠한 방향이 의 증가가 가장 큰가?



혹은 다른 관점으로 의 동일한 증가율을 나타내는 아래 그림의 빨간 선 들 중에서 어떠한 게 가장 짧은 경로인가?



기울기 벡터의 의미를 좀 더 살펴보자.

는 특정 방향으로 기울기의 변화량의 조합으로 이루어져 있다. 즉,방향으로 변화량의 정도는 로 표시되며(가파른 정도를 나타냄), 방향으로 변화량의 정도는 로 표시되어 있다. 따라서 기울기 벡터는 두 벡터의 합벡터로 생각할 수 있다.

****

****

**동영상 시청**

1. 편도함수와 기울기 벡터 간의 관계 <https://youtu.be/GkB4vW16QHI>
2. 대기의 밀도 분포에서 기울기 벡터 정의 https://youtu.be/fZ231k3zsAA

**방향 도함수(Directional Derivative)**

다음은 위치에 따른 온도의 변화를 나타낸 것이다. 즉, 로 등온면을 표시한 것이다.



임의의 지점에서 오른쪽으로 거리에 따른 온도변화를 편도함수 로 표현한다. 반면 북쪽으로 거리에 따른 온도변화는 로 표현이 가능하다. 그렇다면 북동방향(혹은 다른 방향)으로 이동시의 온도 변화는 어떻게 표현이 가능할까? 이번에는 이러한 개념을 설명하기 위한 방향 도함수(directional derivatives)를 소개할 것이다. 이는 2변수 함수 이상의 함수의 변화율을 구할 수 있도록 해준다.

일 때,

는 각각 와 방향, 즉, ,방향으로 의 변화율을 나타낸다. 만약 에서 임의의 단위벡터로 의 변화율을 알고 싶다고 가정하자.



위의 그림은 의 그래프인 surface 을 나타낸다. 인 점을 ,인 점을 라 하자. 과 은 와 의 점을 평면상에 투영한 점이며, 둘 간의 거리를 라 하자. 변화에 따른 의 변화량은

로 표현이 가능하다. 그리고 은 에 평행이므로 (는 스칼라량)로 표현이 가능하다. 따라서

이면, 다음과 같은 방향으로의 의 변화율을 얻을 수 있다.

이를 단위벡터 방향으로 함수 의 점에서의 방향 도함수라 한다. 만약 이면 , 이면, 가 된다. 즉, 와 에 대한 의 편미분은 방향 도함수의 특수한 경우에 해당한다.

**(예제)** 이 장의 처음에 소개한 등온선도를 예제로 방향 도함수 의 의미를 살펴보면 이는 근사적으로 등온선도에서 두 지점 간의 **평균 온도 변화율**이라 생각해도 무방하다. (정확히는 차이가 나지만) 만약 A지점에서 온도가 30oC이고 남동쪽의 B지점에서 온도가 25oC일 때, A와 B지점간의 거리가 2m라고 할 경우, 남동쪽 방향으로 온도 변화율은 이다. 이 값을 방향 도함수 값이라 해석해도 괜찮다.

위의 예제는 개념적으로 방향 도함수를 구한 것이다. 더 정확히 수학적으로 계산하는 방법은 다음과 같다.

이 정의에서도 의 의미를 유추할 수 있다.

는 와 사이의 각도이다. 의 최대값은 1이며, 이 때 이다. 따라서 의 최대값은 일 때, 즉, 와 가 같은 방향일 때, 이다. 즉, 임의의 점에서 의 가능한 모든 방향 도함수를 고려했을 때 그 들 중 가장 가파르게 증가하는 방향(steepest ascending direction)으로 기울기의 크기를 갖는 벡터를 의미한다.

아래 그림은 에서의 contour plot을 나타내며, 기울기 벡터와 방향 도함수와의 관계를 나타낸다. 기울기 벡터는 함수의 최대 증가율을 나타내므로 방향 도함수보다 화살표가 길다는 것에 주의하자.

****

**(예제**) 함수 일 때, 의 기울기 벡터를 구하시오. 또한 (1,3,0)에서 방향으로 방향 도함수 를 구하시오.

**(예제)** 일 때, (1,1)에서 변화율이 가장 큰 방향은 어디인가?

**기울기 벡터의 성질 요약**

1. 는 가 가장 급격하게 변하는 방향을 가리킨다. 예를 들어, 가 온도의 변화를 나타낸다면, 의 방향은 온도의 변화가 가장 급한 방향을 가리킨다.
2. 는 의 등고면에 수직인 방향을 가리킨다.
3. 가장 급격하게 변하는 양의 크기는 이다.
4. , 즉, 와 의 스칼라 곱을 통해 임의의 방향 으로의 방향 도함수를 계산할 수 있다.

기울기 벡터는 매우 중요하다. 많은 물리계에서는 기울기를 감소하는 방향으로 확산이 발생한다. 예를 들어 열은 높은 곳에서 낮은 곳으로 흐른다. 이는 기울기가 감소하는 방향으로 흐르는 것을 의미한다.

**(예제)** 다공성 매질을 통과하는 유체의 흐름은 다르시의 법칙(D’Arcy’s Law)에 의해

로 표현한다. 는 유체의 속도, 는 투자율, 는 점성,는 압력이다.

**(예제)** 도체(conductive material)를 통과하는 열 플럭스(heat flux) 는

는 열전도도, 는 온도이다.

**(예제)** 기압 경도력(pressure gradient force)이 공기에 미치는 유일한 힘이라고 가정하면, 공기는 등압선에 수직한 방향으로 기압이 높은 곳에서 낮은 곳으로 움직인다. 이 때의 힘인 기압 경도력은

로 나타내며, 은 질량, 는 공기 밀도, 는 압력이다.



**(예제)** 2차원에서 원점에 놓인 질량 인 물체가 에 위치할 때 중력 포텐셜 에너지는

으로 주어지며, 는 중력상수이다. 이 퍼텐셜에서 기울기 벡터는 중력가속도에 반대 방향으로 주어진다. 즉,

이다. 를 구하시오.